CH.0 : NOTIONS D' ANALYSE VECTORIELLE

Plan *(Cliquer sur le titre pour accéder au paragraphe)*

****

CH.0 : NOTIONS D' ANALYSE VECTORIELLE 1
I. QUELQUES OPERATEURS 1
I.1. L' OPERATEUR SYMBOLIQUE « NABLA » 1
I.2. LE GRADIENT 2
I.3. LA DIVERGENCE 2
I.4. LE ROTATIONNEL 2
I.5. LE LAPLACIEN 2
II. QUELQUES RELATIONS D' ANALYSE VECTORIELLE 3
II.1. LES QUATRE RELATIONS FONDAMENTALES 3
II.2. COMMENTAIRES 3
III. QUELQUES THEOREMES 3
III.1. THEOREME DE STOKES-AMPERE 3
III.2. THEOREME DE GREEN-OSTROGRADSKI 3
IV. QUELQUES CHAMPS PARTICULIERS 4
IV.1. CHAMP DE GRADIENT 4
IV.1.1. Définition 4
IV.1.2. Condition nécessaire et suffisante 4
IV.1.3. Propriétés 4
IV.2. CHAMP DE ROTATIONNEL 4
IV.2.1. Définition 4
IV.2.2. Condition nécessaire et suffisante 4
IV.2.3. Propriétés 4
V. QUELQUES AUTRES SYSTEMES DE COORDONNEES 5
V.1. ASPECT INTRINSEQUE DES OPERATEURS 5
V.2. EXPRESSION DES OPERATEURS DANS CES SYSTEMES 5
V.2.1. Coordonnées cylindriques 5
V.2.2. Coordonnées sphériques 6
VI. CONCLUSION 6

****

I. QUELQUES OPERATEURS

I.1. L' OPERATEUR SYMBOLIQUE « NABLA »

• Dans un premier temps, nous nous limiterons aux coordonnées **cartésiennes**.

• Dans ce système de coordonnées **uniquement**, introduisons un opérateur symbolique appelé « NABLA » et noté $\vec{\nabla}$; cet opérateur vectoriel est défini par :

$$\boxed{\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z}$$

I.2. LE GRADIENT

• Soit $U(x,y,z,t)$ un champ **scalaire** ; on pose :

$$\boxed{\overrightarrow{grad}U = \vec{\nabla}U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{e}_z}$$

• **Rq :** le gradient est un opérateur vectoriel qui ne s'applique qu'à un champ scalaire.

I.3. LA DIVERGENCE

• Soit $\vec{A}(x,y,z,t)$ un champ **vectoriel** ; on pose :

$$\boxed{div\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}}$$

• **Rq1 :** la divergence est un opérateur scalaire qui ne s'applique qu'à un champ vectoriel.

Rq2 : pour un champ de la forme $\vec{A} = A_j(i)\vec{e}_j$, avec $i \neq j$ représentant l'une quelconque des variables x, y ou z, on peut vérifier que sa divergence est nulle (cette remarque est valable pour tous les systèmes de coordonnées).

I.4. LE ROTATIONNEL

• Toujours pour un champ vectoriel $\vec{A}(x,y,z,t)$, on pose :

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\vec{A} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z}$$

• **Rq1 :** le rotationnel est un opérateur vectoriel qui ne s'applique qu'à un champ vectoriel.

Rq2 : pour un champ de la forme $\vec{A} = A_i(i)\vec{e}_i$, on peut constater que son rotationnel est toujours nul, quel que soit le système de coordonnées.

I.5. LE LAPLACIEN

• **Champ scalaire :**

$$\boxed{\Delta U(x,y,z,t) = (\vec{\nabla})^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}}$$

• **Champ vectoriel :**

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta\vec{A}(x,y,z,t) &= (\vec{\nabla})^2\vec{A} = [(\vec{\nabla})^2 A_x]\vec{e}_x + [(\vec{\nabla})^2 A_y]\vec{e}_y + [(\vec{\nabla})^2 A_z]\vec{e}_z \\ &= \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right)\vec{e}_z \end{aligned}}$$

Rq1: tous ces opérateurs sont **LINEAIRES**.

Rq2 : le gradient, la divergence et le rotationnel ont la dimension de l'inverse d'une longueur (m^{-1}) ; le laplacien a la dimension de l'inverse d'une longueur au carré (m^{-2}) : y penser lors d'une analyse dimensionnelle.

II. QUELQUES RELATIONS D’ ANALYSE VECTORIELLE

II.1. LES QUATRE RELATIONS FONDAMENTALES

Les relations suivantes ont un caractère intrinsèque (on peut les vérifier en coordonnées cartésiennes) :

$$\boxed{\begin{array}{llll} div(\overrightarrow{grad}) = \Delta & (1) & \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}) = \vec{0} & (2) \\ div(\overrightarrow{rot}) = 0 & (3) & \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}) = \overrightarrow{grad}(div) - \Delta & (4) \end{array}}$$

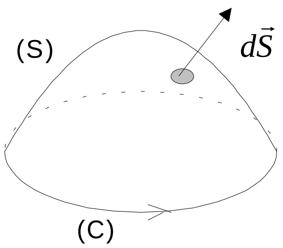
II.2. COMMENTAIRES

- Il existe beaucoup d’autres relations d’analyse vectorielle, mais seules les 4 précédentes se « manipulent » constamment dans le cours de 2ème année : si nécessaire, l’énoncé fournira toute relation supplémentaire permettant de simplifier un calcul.
- Pour mémoire, donnons également une relation qui peut s’avérer pratique :

$$\boxed{div[U(x,y,z,t)\vec{A}(x,y,z,t)] = \vec{\nabla}\cdot(U\vec{A}) = \vec{\nabla}U\cdot\vec{A} + U\times\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \overrightarrow{grad}U\cdot\vec{A} + U\times div\vec{A}}$$

III. QUELQUES THEOREMES

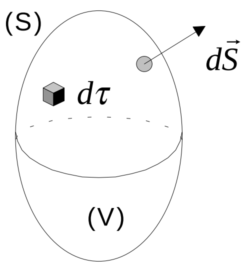
III.1. THEOREME DE STOKES-AMPERE



Soit (C) un contour (courbe fermée orientée) et (S) une surface qui s'appuie sur (C) , dont l'orientation est liée à celle de (C) par la "règle du tire-bouchon".
On établit pour tout champ vectoriel $\vec{A}(\vec{r},t)$ dont les **dérivées partielles sont bornées** dans le domaine d'intégration:

$$\boxed{\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{l} = \iint_S \overrightarrow{rot}\vec{A}\cdot d\vec{S}}$$

III.2. THEOREME DE GREEN-OSTROGRADSKI



Soit (S) une surface **fermée** , limitant un volume (V). Cette surface est orientée de l'**intérieur vers l'extérieur** de ce volume.
Pour tout champ vectoriel $\vec{A}(\vec{r},t)$ dont les dérivées partielles sont bornées dans le domaine d'intégration, on a:

$$\boxed{\oiint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \iiint_V div\vec{A}\times d\tau}$$

Rq1: le symbole $\oiint_S$ est là pour rappeler que le théorème ne s’applique que si (S) est une surface fermée.

Rq2 : on évitera les volumes dont on ne peut définir un « intérieur » et un « extérieur » (bouteille de Klein, par exemple…).

IV. QUELQUES CHAMPS PARTICULIERS

IV.1. CHAMP DE GRADIENT

IV.1.1. Définition

Un champ de vecteurs $\vec{E}$, défini dans une certaine portion de l'espace, est dit « champ de gradient » s'il existe une fonction scalaire V, appelée « potentiel scalaire de $\vec{E}$ » telle que :

$$\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V}$$

IV.1.2. Condition nécessaire et suffisante

D'après la formule d'analyse vectorielle (2), si $\vec{E}$ est un champ de gradient, alors nécessairement son rotationnel est nul ; réciproquement, on peut montrer que si le rotationnel est nul, alors la fonction potentiel scalaire existe, d'où la C.N.S :

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\vec{E} = \vec{0}}$$

IV.1.3. Propriétés

- $\int_{M_1}^{M_2} \vec{A}\cdot d\vec{l} = -\int_{M_1}^{M_2} \overrightarrow{grad}V \cdot d\vec{l} = -\int_{M_1}^{M_2} dV \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int_{M_1}^{M_2} \vec{A}\cdot d\vec{l} = V(M_1) - V(M_2)}$

$\Rightarrow$ la circulation d'un champ de gradient **ne dépend pas du chemin suivi**.

- En particulier : $\boxed{\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{l} = 0}$ $\Rightarrow$ la circulation d'un champ de gradient sur un contour est nulle.

- Les champs **électrostatiques** et les forces dérivant d'un potentiel sont des champs de gradient

IV.2. CHAMP DE ROTATIONNEL

IV.2.1. Définition

Un champ de vecteurs $\vec{B}$ est dit « champ de rotationnel » s'il existe un vecteur $\vec{A}$ appelé « potentiel-vecteur » de $\vec{B}$ tel que :

$$\boxed{\vec{B} = \overrightarrow{rot}\vec{A}}$$

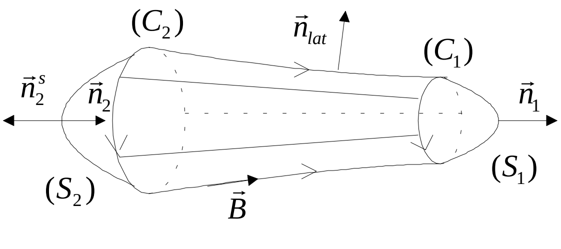
IV.2.2. Condition nécessaire et suffisante

L'utilisation de la formule (3) conduit à la C.N.S : $\boxed{div\vec{B} = 0}$

IV.2.3. Propriétés

- Exprimons le flux Φ du champ $\vec{B}$ à travers une surface **fermée** (S) limitant un volume (V) ; par application du théorème de Green-Ostrogradski, on a :

$$\boxed{\Phi = \oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \iiint_V div\vec{B} \times d\tau = 0} \qquad (5)$$



Considérons un tube de champ (= ensemble de lignes du champ $\vec{B}$) s'appuyant sur 2 contours (C_1) et (C_2) orientés dans le même sens. Constituons une surface **fermée** grâce à 2 surfaces (S_1) et (S_2) s'appuyant respectivement sur (C_1) et (C_2) .

• D'après la relation (5), le flux de $\vec{B}$ **sortant** de cette surface fermée est nul ; $\vec{B}$ et $\vec{n}_{lat}$ étant normaux, le flux sortant latéralement est également nul.
Il vient donc : $\Phi_{S_2}(\vec{n}_2^s)+\Phi_{S_1}(\vec{n}_1)=0$, où $\Phi_{S_2}(\vec{n}_2^s)$ est le flux **sortant** de (S_2), donc orienté par la normale $\vec{n}_2^S$.

• Si maintenant on s'intéresse au flux **traversant** (S_2), il faut considérer la normale $\vec{n}_2$, orientée par la règle du tire-bouchon à partir de l'orientation du contour (C_2) ; puisque $\vec{n}_2=-\vec{n}_2^s$, il vient :

$$\boxed{\Phi_{S_2}(\vec{n}_2)=\Phi_{S_1}(\vec{n}_1)\ ,\quad \forall\ (S_1)\ \text{et}\ (S_2)\ \text{coupant un tube de champ donné}}$$

• On dit que : $\vec{B}$ est à « **FLUX CONSERVATIF** »

• **Rq :** le champ magnétique sera toujours à flux conservatif.

V. QUELQUES AUTRES SYSTEMES DE COORDONNEES

V.1. ASPECT INTRINSEQUE DES OPERATEURS

• Les opérateurs précédents ont été introduits à partir de leur expression en coordonnées cartésiennes, mais il existe des relations les définissant de manière **intrinsèque** (indépendamment du repère choisi).
• Citons pour mémoire :

♦ pour une fonction scalaire V indépendante du temps : $dV=\overrightarrow{grad}V\cdot d\vec{l}$

⇒ connaissant l'expression du déplacement élémentaire dans le repère choisi, on peut en déduire celle de l'opérateur gradient.

♦ le théorème de Green-Ostrogradski permet d'écrire : $div\vec{A}=\dfrac{d\Phi}{d\tau}$

⇒ la divergence d'un vecteur $\vec{A}$ représente le flux de $\vec{A}$ sortant localement par unité de volume.

V.2. EXPRESSION DES OPERATEURS DANS CES SYSTEMES

V.2.1. Coordonnées cylindriques

• **le gradient :** en-dehors des coordonnées cartésiennes, c'est le seul opérateur dont il faut connaître ici l'expression, soit :

$$\boxed{\overrightarrow{grad}U(r,\theta,z)=\frac{\partial U}{\partial r}\vec{e}_r+\frac{1}{r}\times\frac{\partial U}{\partial\theta}\vec{e}_\theta+\frac{\partial U}{\partial z}\vec{e}_z}$$

• **la divergence :**

$$\boxed{div\vec{A}(r,\theta,z)=\frac{1}{r}\times\frac{\partial}{\partial r}(rA_r)+\frac{1}{r}\times\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial A_z}{\partial z}}$$

• **le rotationnel :**

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\vec{A}(r,\theta,z)=\left(\frac{1}{r}\times\frac{\partial A_z}{\partial\theta}-\frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r+\left(\frac{\partial A_r}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta)-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\vec{e}_z}$$

• **le laplacien :**

$$\boxed{\Delta U(r,\theta,z)=\frac{1}{r}\times\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\times\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}}$$

Rq : pour le laplacien-vecteur, c'est plus compliqué car Δ agit non seulement sur les composantes A_r, A_θ et A_z, mais aussi sur les vecteurs de base $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_z$.

V.2.2. Coordonnées sphériques

• **le gradient :**

$$\boxed{\overrightarrow{grad}U(r,\theta,\varphi)=\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{1}{r}\times\frac{\partial U}{\partial \theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\times\frac{\partial U}{\partial \varphi}}$$

• **la divergence :**

$$\boxed{div\vec{A}(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{r^2}\times\frac{\partial(r^2A_r)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\times\frac{\partial(A_\theta\sin\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\times\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}}$$

• **le rotationnel :**

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\vec{A}=\left(\frac{1}{r\sin\theta}\times\frac{\partial(A_\varphi\sin\theta)}{\partial\theta}-\frac{1}{r\sin\theta}\times\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_r+\left(\frac{1}{r\sin\theta}\times\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}\times\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta+\left(\frac{1}{r}\times\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r}-\frac{1}{r}\times\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\vec{e}_\varphi}$$

• **le laplacien :**

$$\boxed{\Delta U(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{r^2}\times\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\times\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\times\frac{\partial^2U}{\partial\varphi^2}}$$

VI. CONCLUSION

• Même si la plupart des relations d'analyse vectorielle sont données par les énoncés, il faut être particulièrement à l'aise avec toutes les formules des quatre premiers paragraphes et s'exercer à retrouver les formules d'analyse vectorielle fondamentales pour manipuler et saisir le « mécanisme » des différents opérateurs (en particulier, le rotationnel...).

• En-dehors des coordonnées cartésiennes, il n'est pas nécessaire d'apprendre les expressions des opérateurs : s'il le faut, l'énoncé, encore une fois, les donnera.
Cette remarque va plus loin : si l'opérateur n'est pas donné, c'est que le concepteur du sujet attend une autre méthode (approche intégrale par opposition à une approche locale) ; dans tous les cas, il ne faut pas « inventer » une expression farfelue (en coordonnées sphériques, pour un champ ne dépendant que de r, on voit encore trop souvent dans les copies $\Delta U(r)=\partial^2U/\partial r^2$ ...).

• Enfin, pour se persuader de limiter l'utilisation du vecteur NABLA aux seules coordonnées cartésiennes, il suffit d'examiner les expressions du gradient et de la divergence en coordonnées cylindriques : l'expression du gradient suggère de postuler $\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r+\frac{1}{r}\times\frac{\partial}{\partial\theta}\vec{e}_\theta+\frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z$, mais si l'on effectue $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$, on ne retrouve pas $div\vec{A}$.